



Facultatea de Inginerie Electrică, Energetică
și Informatică Aplicată (IEEIA)



Identificarea și Modelarea Sistemelor

C7

Prof.univ.dr.ing. Marian-Silviu Poboroniuc

Identificarea cu semnale de probă periodice

Folosirea **semnalelor de probă periodice** pentru identificarea sistemelor prezintă o **serie de avantaje** ca:

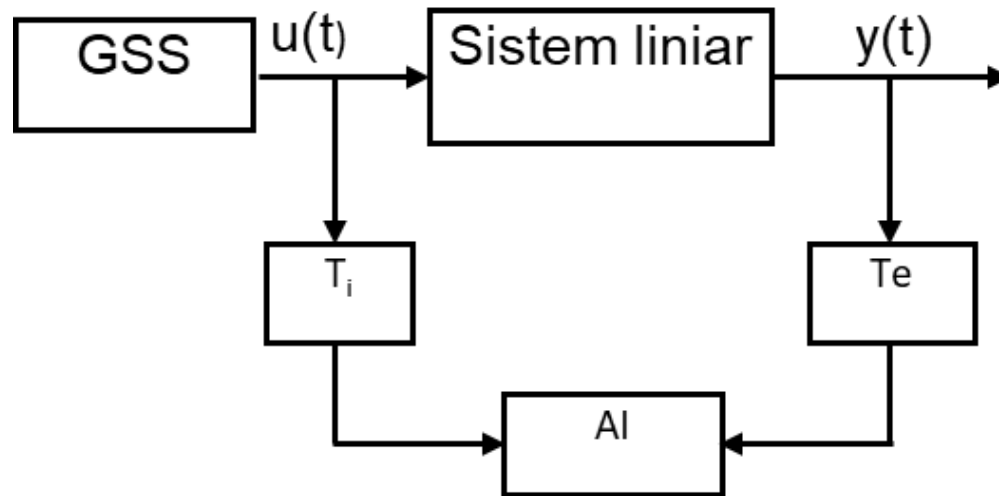
- **discriminarea ușoară a influenței zgomotelor interne și ale perturbațiilor** asupra semnalului de ieșire;
- permite **determinarea directă a răspunsului la frecvență a sistemelor**;
- asigură o **precizie uniformă pe întreaga bandă de frecvență a sistemelor studiate etc.**

Dezavantajele acestei metode se referă la:

- **necesitatea unei aparaturi speciale** pentru generarea semnalelor și prelucrarea datelor experimentale;
- **durata mare a experimentului de identificare.**

În cazul **sistemelor liniare** determinarea caracteristicilor de **frecvență se face punct cu punct** prin **compararea directă** a **oscilațiilor $u(t)$** (produse de generatorul de semnal sinusoidal GSS) aplicate **la intrarea sistemului** și a **oscilațiilor $y(t)$** obținute **la ieșirea acestuia**.

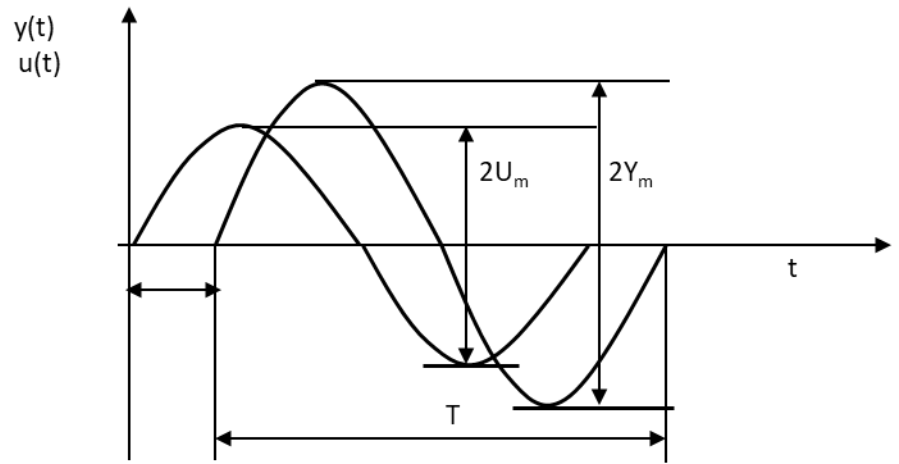
Se obțin: **modulul și faza răspunsului la frecvență**. Mărimile $u(t)$ și $y(t)$, prin intermediul traductoarelor T_i , respectiv T_e , sunt înregistrate de aparatul AI .

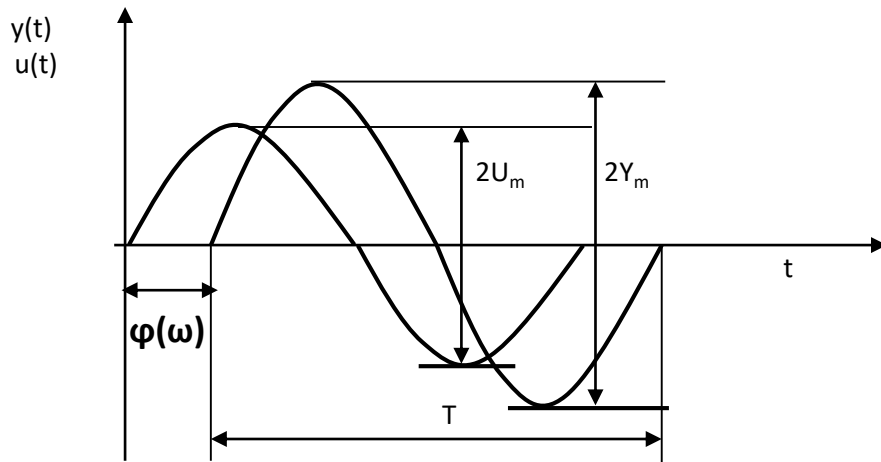


Pentru **ridicarea experimentală** a caracteristicilor de frecvență cel mai simplu ar fi **să se aplice la intrare un semnal de amplitudine constantă și de pulsație variabilă** în trepte.

În acest caz este dificilă prelucrarea datelor în domeniul frecvențelor medii și mari unde, de regulă, modulul are valori din ce în ce mai mici.

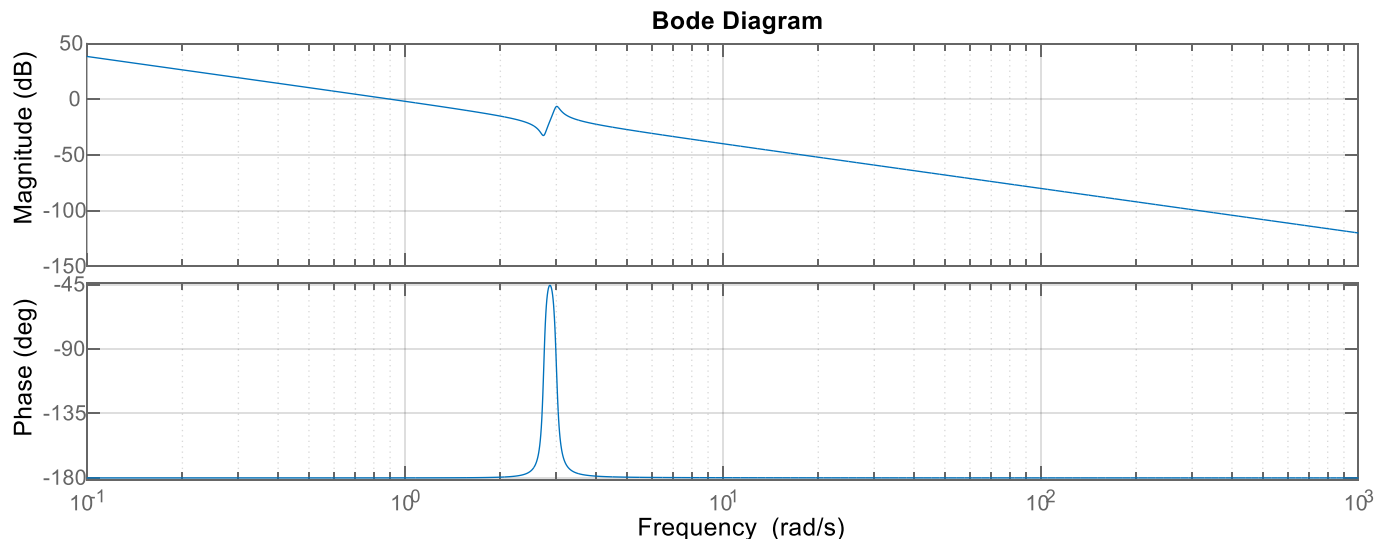
Se impune deci mărirea amplitudinii semnalului de intrare pe măsura creșterii frecvenței, însoțită de un control al amplitudinii oscilațiilor de ieșire pentru a nu depăși regimul normal de funcționare.





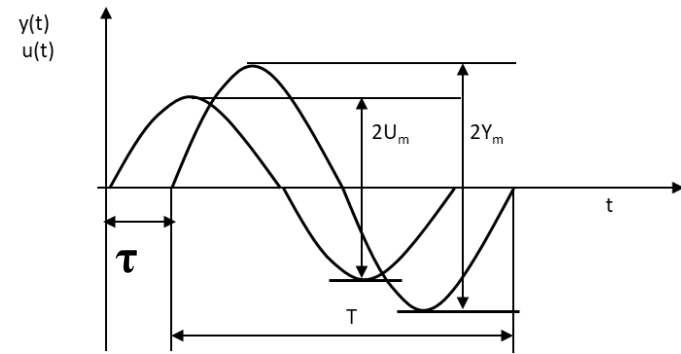
ω_k	0.001	0.5	...
$\lg(\omega_k)$			
$M(\omega_k)=2Y_m/(2U_m)$			
$\varphi(\omega_k)$			
$A[\text{dB}]=20\lg(M(\omega_k))$			

Pentru fiecare pulsație ω_k se măsoară dublul amplitudinilor oscilațiilor $2U_m$ și $2Y_m$, cu care se calculează valoarea modulului $M(\omega_k)$ pentru pulsația respectivă.



$$M(\omega_k) = \frac{2Y_m}{2U_m} \quad \varphi(\omega_k) = \frac{\tau}{T} 360^\circ$$

Determinarea defazajului pentru o pulsație ω_k se face pe baza decalajului în timp τ a celor două semnale, unde T este perioada semnalelor.

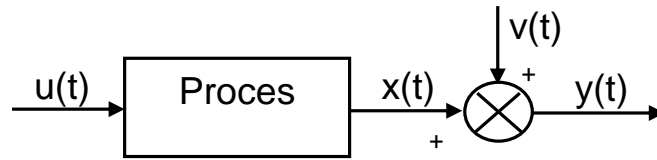


Măsurările se fac în regim de oscilații sinusoidale forțate:

$$u(t) = U_m \sin \omega t \quad y(t) = Y_m \sin(\omega t - \varphi)$$

Prelucrarea datelor experimentale implică un volum mare de calcule în vederea extragerii informațiilor utile, mai ales în prezența perturbațiilor.

Pentru că de obicei, perturbația $v(t)$ nu este corelată cu intrarea $u(t)$, influența perturbației se elimină ușor aplicând o tehnică de corelație.



Rezultă:

$$y(t) = x(t) + v(t) \quad \text{si in funcții de intercorelație ...}$$

$$R_{uy}(\tau) = R_{ux}(\tau) + R_{uv}(\tau) = R_{ux}(\tau)$$

pentru că $R_{uv}(\tau) = 0$ deoarece $u(t)$ nu este corelat cu $v(t)$

Definitii:

Funcția de autocorelație a unui semnal $x(t)$ reprezintă valoarea medie temporală a produsului $x(t) \cdot x(t+\tau)$. Se mai numește valoare medie de ordin 2.

$$R_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt$$

Valoarea funcției de autocorelare reprezintă o măsura a gradului de previzibilitate ca valoarea semnalului $x(t+\tau)$ să fie egală cu $x(t)$.

Definitii:

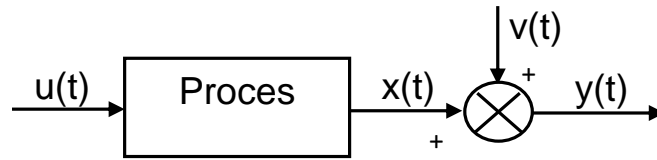
Functia de autocorelatie a unui semnal $x(t)$ se poate exprima si numeric.

$$R_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x(kT_e)x(kT_e+\tau) \quad (\text{R.1})$$

Cu $T_e \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Intervalul de timp τ se numeste timp de corelare, iar $\tau < T$ si $\tau > T_e$.

Valoarea funcției de autocorelare reprezinta o masura a gradului de previzibilitate ca valoarea semnalului $x(t+\tau)$ sa fie egala cu $x(t)$.



Rezultă:

$$y(t) = x(t) + v(t)$$

$$R_{uy}(\tau) = R_{ux}(\tau) + R_{uv}(\tau) = R_{ux}(\tau)$$

pentru că $R_{uv}(\tau) = 0$

Dacă $u(t) = U_m \sin \omega_k t$, atunci în regim staționar

$$x(t) = X_m \sin(\omega_k t - \varphi) = U_m |H(j\omega_k)| \sin(\omega_k t - \varphi)$$

Calculând funcția de intercorelație intrare-ieșire pentru o perioadă T suficient de mare, rezultă:

$$R_{uy}(\tau) = R_{ux}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)x(t + \tau) dt \quad (\text{R.2})$$

$$\begin{aligned}
R_{uy}(\tau) &= R_{ux}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)x(t+\tau)dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 |H(j\omega_k)| \sin(\omega_k t) \bullet \sin[\omega_k(t+\tau) - \varphi] dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{U_m^2}{2} |H(j\omega_k)| \int_0^T [\cos(\omega_k \tau - \varphi) - \cos(2\omega_k t + \omega_k \tau - \varphi)] dt = \\
&= \frac{U_m^2}{2} |H(j\omega_k)| \cos(\omega_k \tau - \varphi) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{U_m^2 |H(j\omega_k)|}{4\omega_k T} \sin(2\omega_k t + \omega_k \tau - \varphi) \Big|_0^T
\end{aligned}$$

Se obține deci

$$R_{uy}(\tau) = \frac{U_m^2}{2} |H(j\omega_k)| \cos(\omega_k \tau - \varphi)$$

care este o funcție periodică de perioadă $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$

ω_k fiind pulsația semnalului aplicat la intrare.

Aceeași relație se poate obține dacă intervalul de observare este un număr întreg de perioade T_k ; aceasta simplifică evaluarea numerică a funcției de intercorelație.

$$R_{uy}(0) = \frac{U_m^2}{2} |H(j\omega_k)| \cos \varphi = \frac{U_m^2}{2} R_e H(j\omega_k) = \frac{U_m^2}{2} H_R(\omega_k)$$

$$R_{uy}\left(\frac{T_k}{4}\right) = \frac{U_m^2}{2} |H(j\omega_k)| \sin \varphi = \frac{U_m^2}{2} I_m H(j\omega_k) = \frac{U_m^2}{2} H_I(\omega_k)$$

Din aceste relații se poate calcula modulul și faza corespunzătoare pulsației ω_k

$$M(\omega_k) = |H(j\omega_k)| = \frac{2}{U_m^2} \sqrt{R_{uy}^2(0) + R_{uy}^2\left(\frac{T_k}{4}\right)}$$

$$\varphi(\omega_k) = \operatorname{arctg} \frac{R_{uy}\left(\frac{T_k}{4}\right)}{R_{uy}(0)}$$

Aceste relații stau la baza funcționării transformetrelor polare, aparate care permit evaluarea rapidă a modulului răspunsului la frecvență și a fazei. Schemele de principiu ale unor astfel de aparate sunt prezentate în fig. 3.12 și 3.13 (foaia următoare).

La ieșirea integratorului din fig. 3.13, se obține funcția de intercorelație $R_{uy}(\tau, \varphi)$ care are următoarea expresie:

$$R_{uy}(\tau, \varphi) = \frac{U_m^2}{2} |H(j\omega_k)| \cdot \cos(\omega_k \tau - \varphi)$$

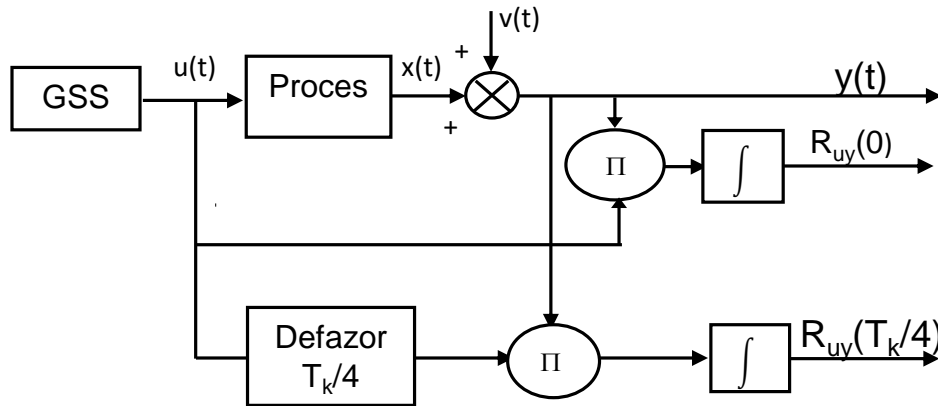


Fig. 3.12*

**Se utilizeaza
(R.1) si (R.2)**

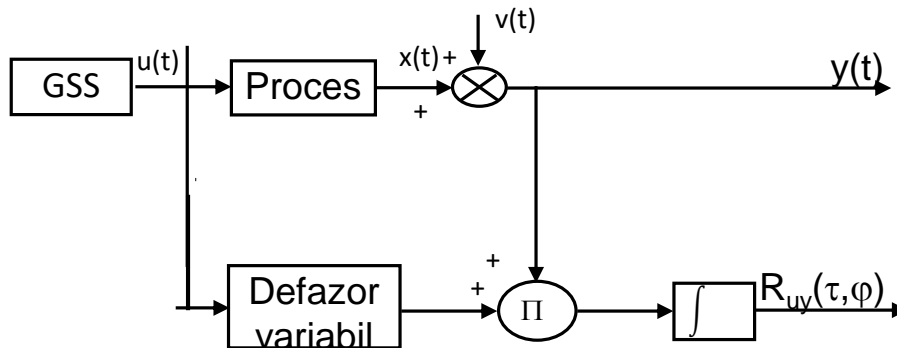


Fig. 3.13*

Corelatorul din fig. 3.13 permite determinarea caracteristicilor de frecvență prin metoda compensării fazei. Se modifică faza defazorului variabil până când se obține maximul mărimii de ieșire din integrator;

$$R_{uy}(\tau, \varphi)_{max} \text{ când } \cos(\omega_k \tau - \varphi) = 1;$$

se deduce astfel modulul corespunzător pulsației ω_k

$$M(\omega_k) = \frac{R_{uy}(\tau, \varphi)_{\max}}{U_m^2 / 2}$$

Modificând defazajul până se anulează mărimea de ieșire a integratorului se determină faza

$$\varphi(\omega_k) = \omega_k \tau_0 - \pi / 2$$

τ_0 fiind defazajul de anulare.

Determinarea funcției de transfer din caracteristicile de frecvență experimentale

Pentru analiza și sinteza sistemelor automate se pot folosi direct caracteristicile de frecvență $M(\omega), \varphi(\omega)$ în coordonate normale sau în coordonate logaritmice (**diagrama Bode**). Trecerea de la caracteristicile de frecvență la un model parametric de forma funcției de transfer se obține prin metode grafo-analitice sau prin metode de optimizare parametrică.

Din caracteristicile de frecvență experimentale trebuie extrasă partea care îndeplinește condiția de fază minimă.

Elementele care nu îndeplinesc condiția de fază minimă sunt, de obicei, cele care prezintă **timp mort** sau au **parametri distribuiți** . În cazul elementelor cu timp mort în funcția de transfer apare un factor

$$e^{-sT_m}$$

iar în caracteristicile de frecvență apare un defazaj

$$\varphi_m(\omega) = -\omega T_m$$

fără a influența modulul (la elementul cu timp mort modulul răspunsului la frecvență

$$M_m(\omega) = 1$$

Elementele care nu îndeplinesc condiția de fază minima:

Neunivocitatea între caracteristicile $M(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ apare și în cazul în care funcția de transfer $H(s)$ are poli de ordin α în origine. De exemplu un element integrator de ordin α , cu funcția de transfer

$$H_{\alpha}(s) = \frac{1}{s^{\alpha}}$$

are caracteristica fază-frecvență

$$\varphi_{\alpha}(\omega) = -\frac{\alpha\pi}{2}$$

care nu depinde de frecvență, iar modulul răspunsului la frecvență

$$M_{\alpha}(\omega) = \frac{1}{\omega^{\alpha}}$$

În aceste cazuri se recurge la extragerea din caracteristica de frecvență $H(j\omega)$ a influenței elementelor care introduc neunivocitatea între $M(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ rezultând partea utilă a răspunsului la frecvență $H_u(j\omega)$, care îndeplinește condiția de fază minimă, aproximată printr-o funcție de transfer de forma:

$$H_u(j\omega) = k \frac{\prod_{l=1}^m (1 + j\tau_l \omega)}{\prod_{i=1}^n (1 + jT_i \omega)}$$

Funcția de transfer generală a sistemului de identificat este de forma

$$H(s) = H_u(s) \frac{e^{-sT_m}}{s^\alpha} = k \frac{\prod_{l=1}^m (1 + s\tau_l)}{s \prod_{i=1}^n (1 + sT_i)} \cdot \frac{e^{-sT_m}}{s^\alpha}$$

Funcția $H_u(s)$ se determină studiind forma locului de transfer $H(j\omega)$ construit pe baza datelor experimentale.

Timpul mort T_m se determină **fie din răspunsul indicial**, fie determinând

$$T_m \omega = \varphi^*(\omega) - \varphi_c(\omega)$$

unde: $\varphi^*(\omega)$ este caracteristica fază-frecvență experimentală, $\varphi_c(\omega)$ este caracteristica fază-frecvență calculată

Parametrii $k, \tau_l, l = \overline{1, m}, T_i, i = \overline{1, n}$, caracterizează partea univocă ai $H_u(s)$ a funcției de transfer și se determină prin **metodele**:

a). Metoda bazată pe aproximarea caracteristicilor logaritmice de frecvență

b). Metode de optimizare parametrică

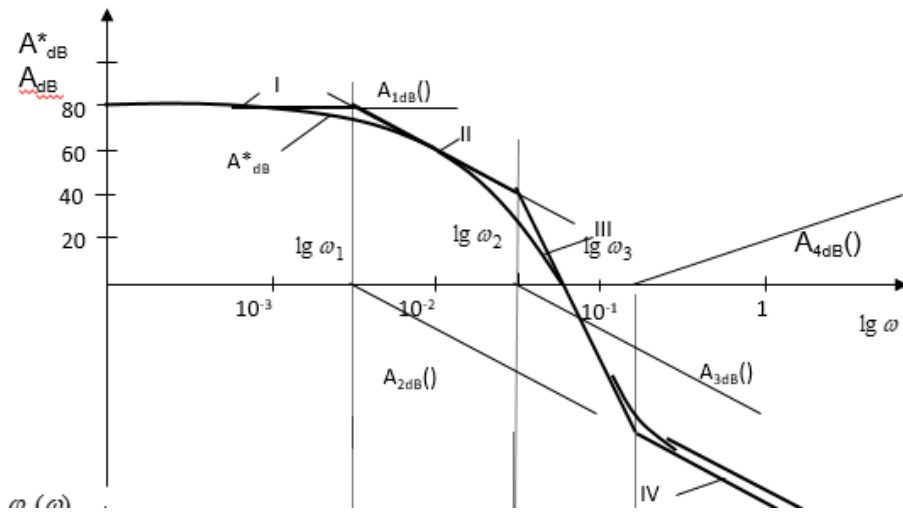
a). Metoda bazată pe aproximarea caracteristicilor logaritmice de frecvență

Metoda permite să se evidențieze polii în origine, timpul mort și structura funcției de transfer. Pentru o funcție de transfer presupusa de forma de mai jos, caracteristicile logaritmice de frecvență asimptotice sunt:

$$H(s) = H_u(s) \frac{e^{-sT_m}}{s^\alpha} = k \frac{\prod_{l=1}^m (1 + s\tau_l)}{s \prod_{i=1}^n (1 + sT_i)} \cdot \frac{e^{-sT_m}}{s^\alpha}$$

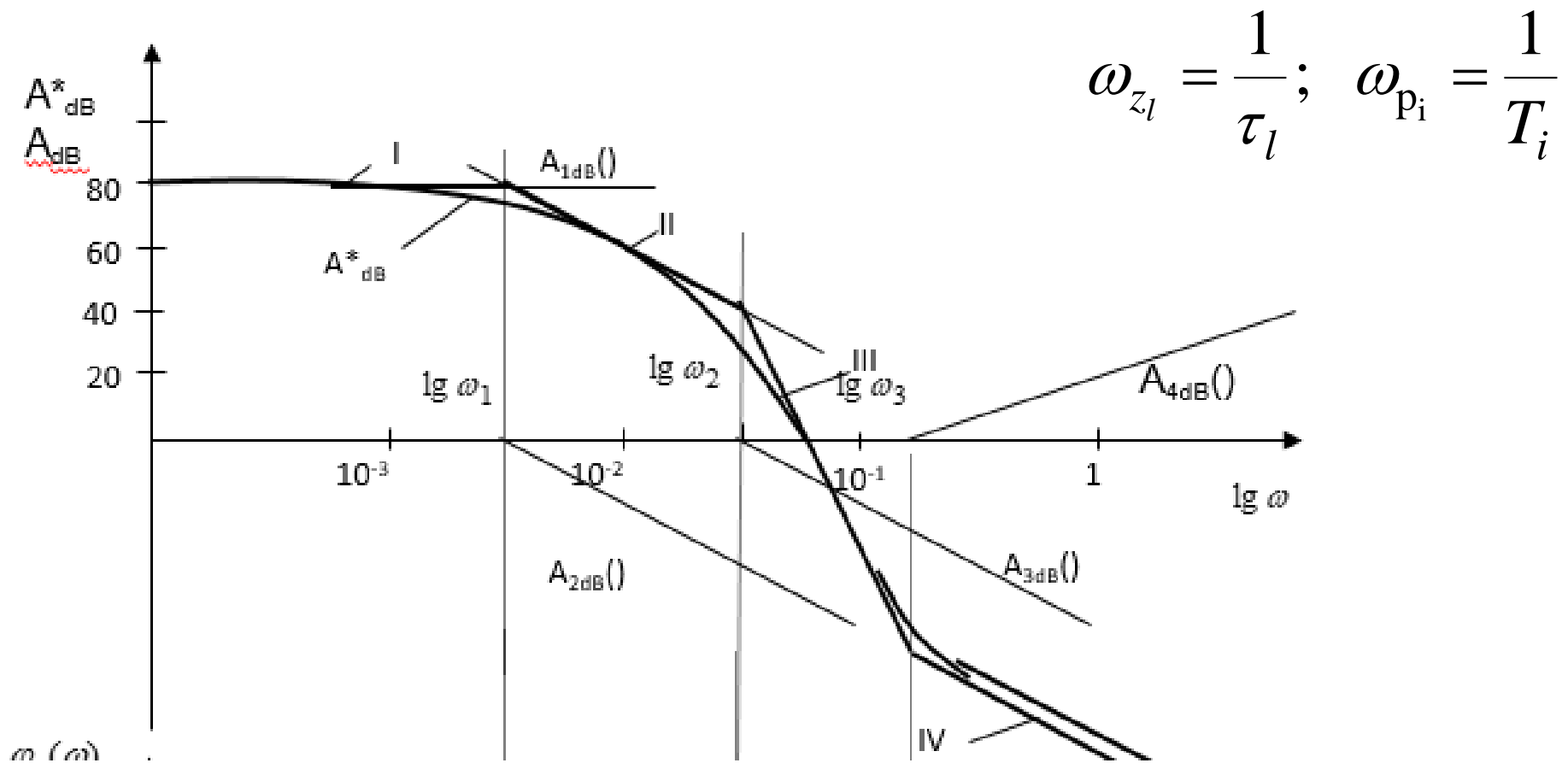
$$A_{dB}(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg k - 20\alpha \lg \omega + \\ + \sum_{l=1}^m 20 \lg(1 + \tau_l^2 \omega^2)^{1/2} - \sum_{i=1}^n 20 \lg(1 + T_i^2 \omega^2)^{1/2}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{l=1}^m \arctg(\omega\tau_l) - \sum_{i=1}^n \arctg(\omega T_i) - \alpha \frac{\pi}{2} - \omega T_m$$



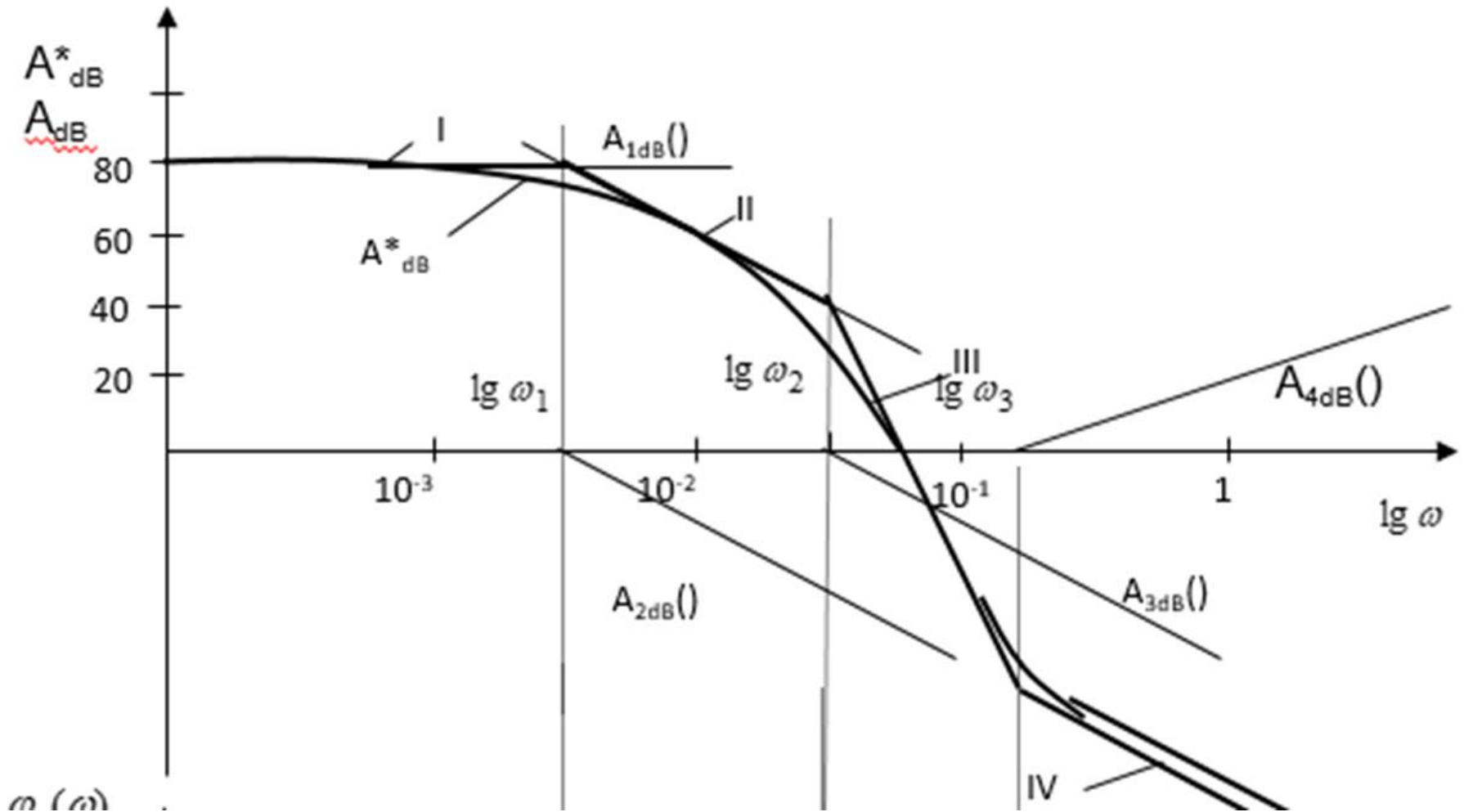
Caracteristica atenuare-frecvență experimentală $A_{dB}^*(\omega)$ se aproximează cu drepte de pantă standard 0 dB/dec, ± 20 dB/dec, ± 40 dB/dec, etc. Trasarea dreptelor se face astfel încât în punctele de intersecție caracteristica aproximativă să nu difere de cea experimentală cu mai mult de 3 dB. Pulsațiile corespunzătoare punctelor de frângere ω_i sunt inversele constantelor de timp

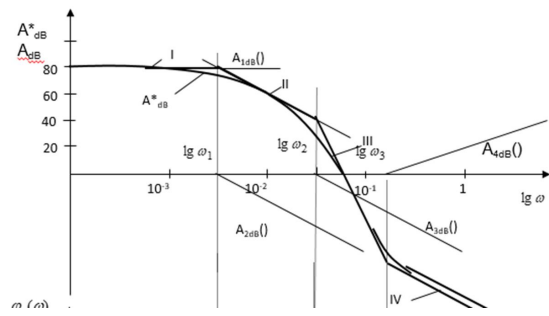
$$\omega_{z_l} = \frac{1}{\tau_l}; \quad \omega_{p_i} = \frac{1}{T_i}$$



Se consideră de exemplu caracteristica experimentală $A_{dB}^*(\omega)$ din figura. In banda de frecvență $0 - \omega_1$ se aproximează caracteristica $A_{dB}^*(\omega)$ cu dreapta I de pantă 0 dB/dec.

În benzile de frecvență $\omega_1 - \omega_2$, $\omega_2 - \omega_3$, $\omega > \omega_3$ caracteristica experimentală $A_{dB}^*(\omega)$ se aproximează cu dreptele *I*, *III*, *IV* care au respectiv pantele de -20 dB/dec, -40 dB/dec și -20 dB/dec.





Caracteristica asimptotică din figura, poate fi considerată ca fiind caracteristica unui ansamblu format din patru elemente cu funcțiile de transfer $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ și $H_4(s)$ conectate în serie, deoarece caracteristica atenuare-frecvență aproximativă este

$$A_{dB}(\omega) = A_{1dB}(\omega) + A_{2dB}(\omega) + A_{3dB}(\omega) + A_{4dB}(\omega)$$

Caracteristica $A_{1dB}(\omega)$, de pantă 0 dB/dec corespunde unui element cu funcția de transfer

$$H_1(s) = k$$

Pentru că asimptotele $A_{2dB}(\omega)$ și $A_{3dB}(\omega)$ au panta de -20dB/dec, ele corespund unor elemente cu funcțiile de transfer de forma de ordin T1.

$$H_2(s) = \frac{1}{T_1s + 1}, \quad H_3(s) = \frac{1}{T_2s + 1}$$

Asimptota $A_{4dB}(\omega)$ cu o pantă de +20 dB/dec
corespunde unui element cu funcția de transfer

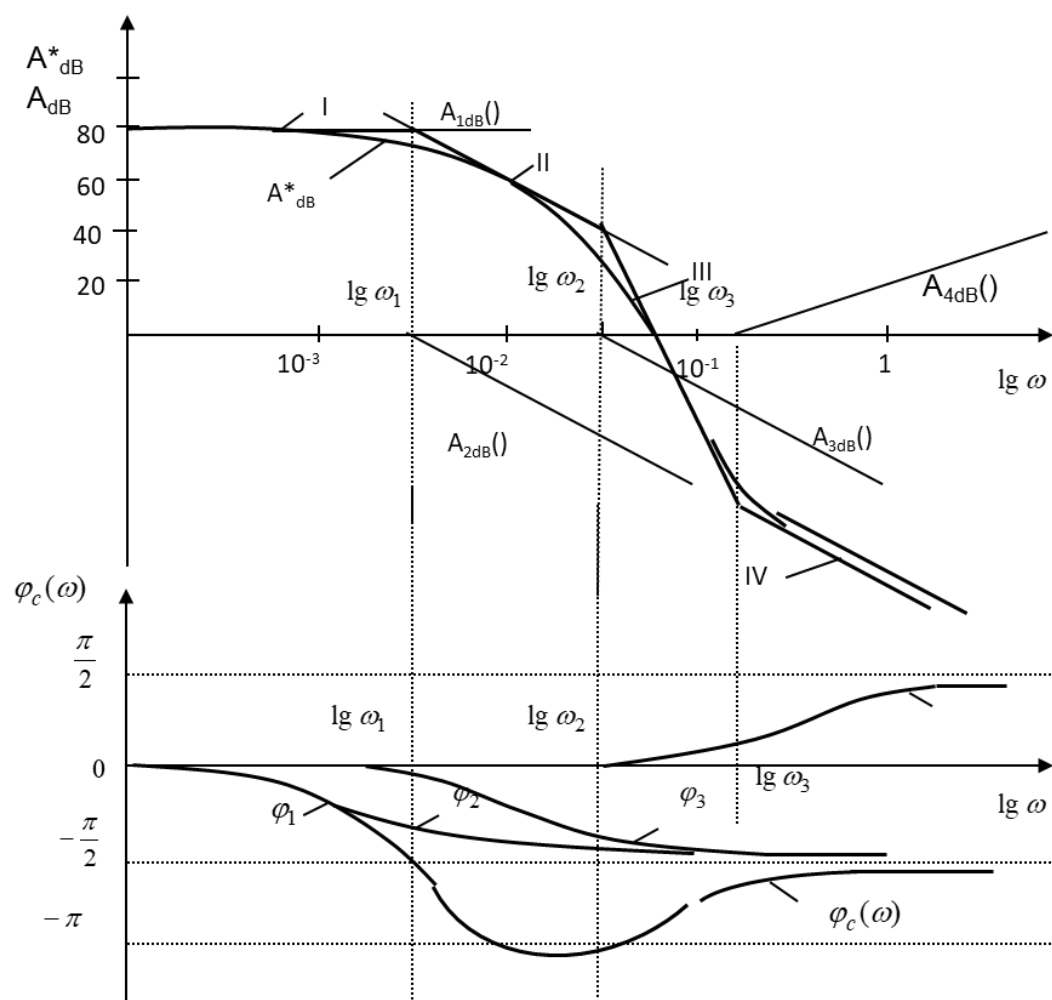
$$H_4(s) = \tau_1s + 1$$

Funcția de transfer corespunzătoare caracteristicii
atenuare-frecvență aproximative $A_{dB}(\omega)$ este

$$H(s) = \frac{k(1 + s\tau_1)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

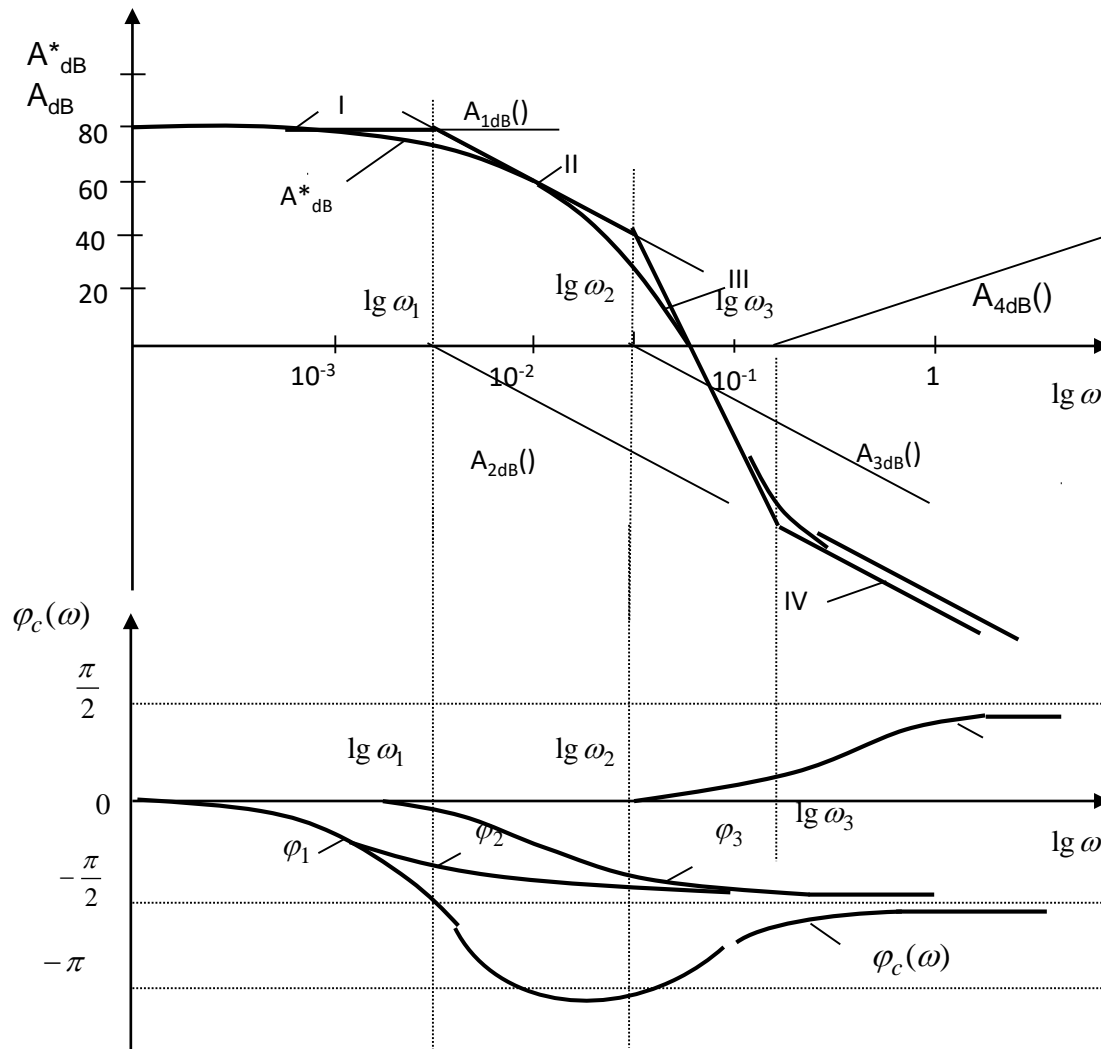
unde

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1}; \quad T_2 = \frac{1}{\omega_2}; \quad \tau_1 = \frac{1}{\omega_3}; \quad 20 \lg k = A_1; \quad k = 10^{\frac{A_1}{20}}$$



Caracteristica fază - frecvență calculată $\varphi_c(\omega)$, se construiește pentru funcția de transfer calculate, rezultând

$$\varphi_c(\omega) = \sum_{i=1}^{n+m} \varphi_i(\omega) = -\arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 + \arctg \omega \tau_1; \quad \varphi_1(\omega) = 0$$



Se compară caracteristica fază-frecvență calculată $\varphi_c(\omega)$ cu caracteristica fază-frecvență experimentală $\varphi^*(\omega)$ pentru a reliefa corectitudinea deducerii funcției de transfer.

Dacă diferența $|\varphi^*(\omega) - \varphi_c(\omega)|$ este mai mică decât o eroare impusă, modelul sistemului dat de funcția de transfer identificata, este corect. **Dacă diferența $\varphi^*(\omega) - \varphi_c(\omega)$ crește proporțional cu frecvența**, înseamnă că există un element cu timp mort T_m , care poate fi determinat cu relația

$$\omega T_m = \varphi^*(\omega) - \varphi_c(\omega)$$

Când $\varphi_c(\omega)$ este translată cu $\alpha \frac{\pi}{2}$ față de $\varphi^*(\omega)$, atunci înseamnă că funcția de transfer are un pol în origine de ordin α .

Dacă diferența $\varphi^*(\omega) - \varphi_c(\omega)$ nu crește proporțional cu frecvența, atunci funcția de transfer trebuie să conțină poli și zerouri suplimentare.

Caracteristica atenuare - frecvență experimentală se aproximează cu un număr mai mare de drepte de pantă standard.

b. Metode de optimizare parametrică

Plecând de la caracteristicile de frecvență experimentale $M^*(\omega_k)$, $\varphi^*(\omega_k)$ $k = 0, 1, 2, \dots, N$ se poate determina un model parametric al sistemului respectiv.

Pentru fiecare pulsație $\omega(k)$ se poate determina răspunsul la frecvență

$$H^*(j\omega_k) = H_R^*(\omega_k) + jH_I^*(\omega_k);$$

$$H_R^*(\omega_k) = M^*(\omega_k) \cos \varphi^*(\omega_k);$$

$$H_I^*(\omega_k) = M^*(\omega_k) \sin \varphi^*(\omega_k).$$

Se consideră modelul sistemului exprimat printr-o funcție de transfer $H(s)$ de forma

$$H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{nb} b_i s^i}{1 + \sum_{i=1}^{na} a_i s^i}$$

cu vectorul parametrilor necunoscuți

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{na} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{nb}]^T$$

și răspunsul la frecvență

$$H(j\omega_k) = \frac{Q(j\omega_k)}{P(j\omega_k)}; \quad k = 0, 1, \dots, N$$

Parametrii θ se determină astfel încât caracteristicile de frecvență ale modelului $H(j\omega)$ să se apropie de cele experimentale $H^*(j\omega)$, conform unui criteriu de optimalitate. Se alege o funcție criteriu de forma

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \sum_{k=0}^N |H^*(j\omega_k) - H(j\omega_k)|^2 = \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{1}{|P(j\omega_k)|^2} |P(j\omega_k)H^*(j\omega_k) - Q(j\omega_k)|^2 \end{aligned}$$

Din cauza factorului $\frac{1}{|P(j\omega_k)|^2}$ criteriul $V(\theta)$ este puternic neliniar

în parametri.

Dacă în funcția criteriu eroarea pătratică este ponderată cu factorul $|P(j\omega_k)|^2$ se obține criteriul.

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \sum_{k=0}^N |P(j\omega_k)|^2 |H^*(j\omega_k) - H(j\omega_k)|^2 = \\ &= \sum_{k=0}^N |P(j\omega_k)H^*(j\omega_k) - Q(j\omega_k)|^2 \end{aligned}$$

care este liniar în parametri. Problema de optimizare se poate rezolva analitic

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} V(\theta)$$

Ponderarea cu factorul $|P(j\omega_k)|^2$ nu este corespunzătoare în tot domeniul frecvențelor.

Ponderarea cu factorul $|P(j\omega_k)|^2$ nu este corespunzătoare în tot domeniul frecvențelor. De aceea se recurge la un algoritm iterativ, cu funcția criteriu la pasul i de forma.

$$V^i(\theta^i) = \sum_{k=0}^N \left| \frac{P_i(j\omega_k)}{P_{i-1}(j\omega_k)} \right|^2 \left| H^*(j\omega_k) - H^i(j\omega_k) \right|^2;$$

$$|P_0(j\omega_k)| = 1; \quad H^i(j\omega_k) = \frac{Q_i(j\omega_k)}{P_i(j\omega_k)}$$

Pentru că $P_{i-1}(j\omega_k)$ este determinat la pasul anterior, criteriul este practic și vectorul parametrilor la iterația i , θ^i , poate fi determinat analitic.

Deoarece raportul $|P_i(j\omega_k)/P_{i-1}(j\omega_k)|^2$ tinde la 1 cu creșterea lui i , ponderea erorii este corespunzătoare în tot domeniul frecvențelor.

Datorită inițializării $|P_0(j\omega_k)|=1$, parametrii obținuți la prima iterație sunt cei determinați prin minimizarea criteriului celor mai mici pătrate ponderate.

Procedeul se aplică pentru un set de structuri ale modelului din ce în ce mai complicate (gradele na , nb , ale polinoamelor $P(s)$, $Q(s)$ cât mai mari).

Se reține acea structură pentru care se obține o descreștere nesemnificativă a minimului funcției criteriu.